

## Capítulo 11 Perspectivas axonométrica y caballera

### Sistema axonométrico: Fundamento

El sistema axonométrico se fundamenta en el empleo de tres ejes en el espacio perpendiculares entre sí en un punto común O origen de coordenadas (conforman un triedro trirrectángulo). Estos tres ejes X, Y y Z se denominan *ejes principales* o *de coordenadas*. A los planos que determinan estos ejes se les denomina *planos principales*. Además, este triedro trirrectángulo debemos situarlo en el espacio respecto del plano de proyección también llamado plano del cuadro o plano del papel.

Un punto A en el espacio se proyecta ortogonalmente sobre los planos principales en los puntos  $A_1, A_2$  y  $A_3$  (figura 1). Estos tres puntos, el punto A y el vértice O del triedro trirrectángulo junto con otros tres puntos  $A_x, A_y$  y  $A_z$  sobre los ejes, son vértices de un paralelepípedo con caras paralelas a los planos principales. Los segmentos  $OA_x, OA_y$  y  $OA_z$  son las coordenadas del punto A. La proyección cilíndrica sobre el plano del papel de todos estos elementos constituye la representación axonométrica del punto A.

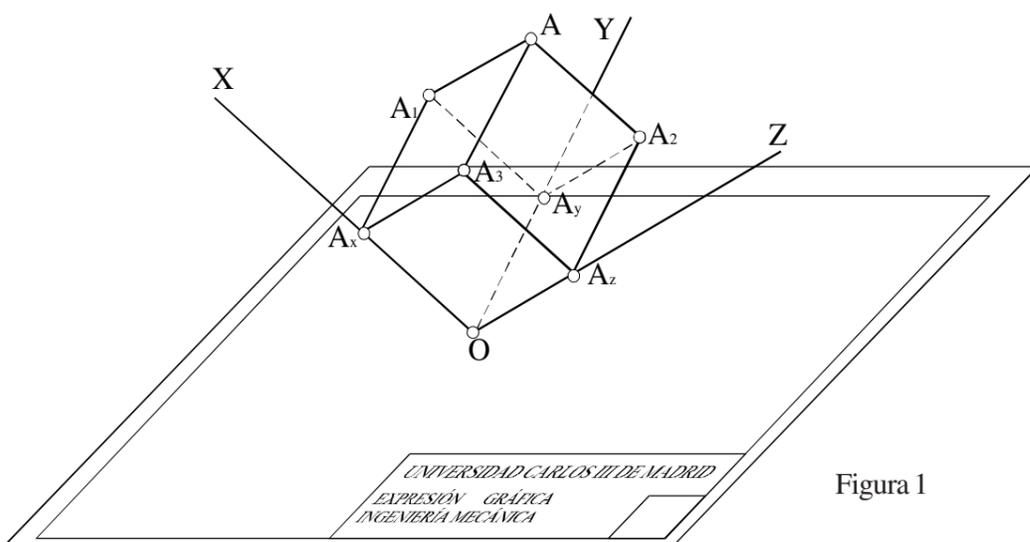
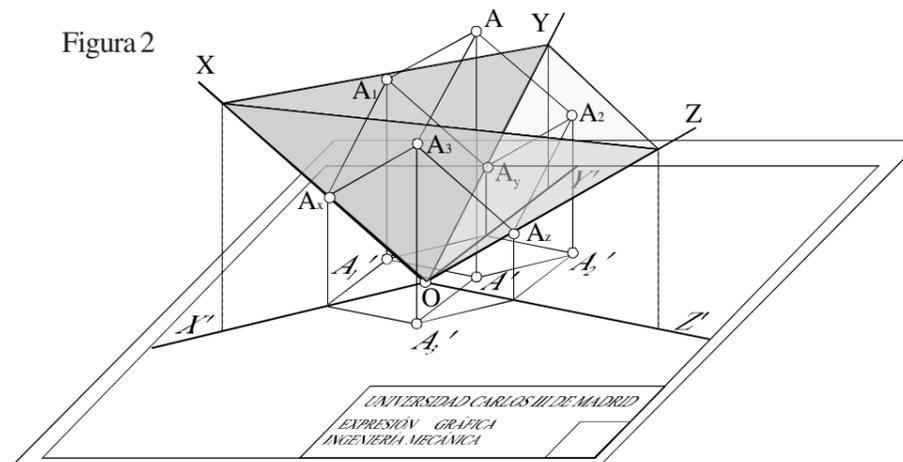


Figura 1

En el plano del cuadro aparecen así los *ejes axonométricos*  $X', Y'$  y  $Z'$  proyecciones de los ejes X, Y y Z; el punto  $O'$  proyección del vértice O; el punto  $A'$  proyección del punto A y los puntos  $A_1', A_2'$  y  $A_3'$  proyecciones de los puntos  $A_1, A_2$  y  $A_3$ . Las aristas del paralelepípedo antes mencionado se proyectan sobre el plano del papel formando tres pares de paralelogramos con vértices en estos puntos proyectados.

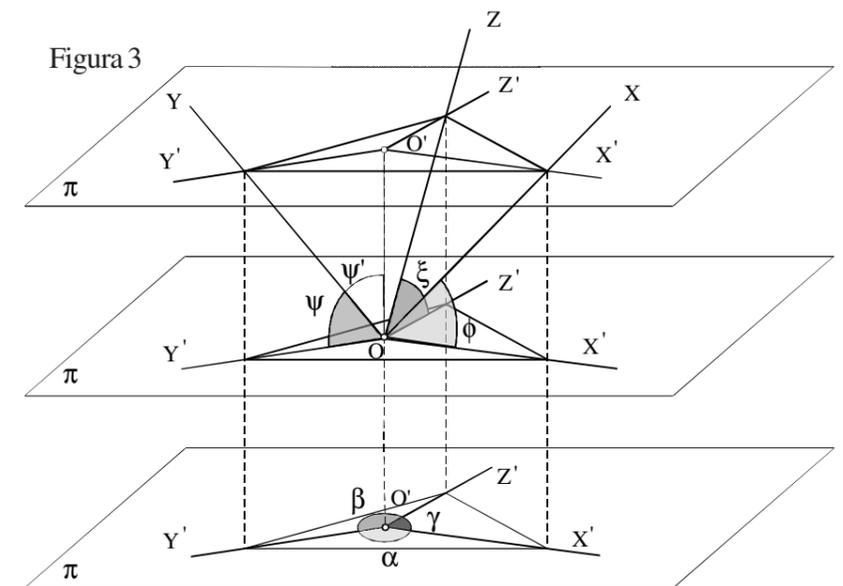


La proyección sobre el plano del papel es cilíndrica, pero puede ser cilíndrica ortogonal o en general cilíndrica oblicua. En cualquier caso, dado un triedro y elegido un plano del papel, todas los sistemas con planos de proyección paralelos a este resultarán equivalentes. Sus *triángulos de trazas* -formados en el plano de proyección por las intersecciones de éste con los planos principales- serán semejantes entre sí. Los triángulos de trazas se llaman *fundamentales* cuando corresponden a planos paralelos al del papel.

Si elegimos el plano del papel que pasa por el vértice O, cada eje principal y su proyección sobre el papel formará un ángulo en el espacio. A estos tres ángulos los denominamos  $XOX' = \phi, YOY' = \psi$  y  $ZOZ' = \xi$ . A su vez, los ejes axonométricos forman entre sí tres ángulos contenidos en el plano del cuadro:  $X'O'Y' = \alpha, Y'O'Z' = \beta$  y  $Z'O'X' = \gamma$ . Obviamente estos tres últimos ángulos deben sumar  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ .

### Sistema axonométrico ortogonal

Si la proyección sobre el plano del cuadro es ortogonal, entonces  $c_x = O'A_x'/OA_x = \cos \phi, c_y = O'A_y'/OA_y = \cos \psi$  y  $c_z = O'A_z'/OA_z = \cos \xi$ . A estos tres cocientes se les denomina *coeficientes de reducción* o *unidades reducidas* de los ejes X, Y y Z. Los cuadrados de estos coeficientes suman dos:  $c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 2$ . Esto puede comprobarse en la figura 3: Tomemos un plano del papel a distancia unidad del vértice O ( $OO' = 1$ ). Si llamamos  $\phi', \psi'$  y  $\xi'$  a los complementarios de  $\phi, \psi$  y  $\xi$  se tiene que  $c_x^2 = \cos^2 \phi = \sin^2 \phi' = 1 - \cos^2 \phi'$  y lo mismo para los otros dos coeficientes. Como  $\phi', \psi'$  y  $\xi'$  son los ángulos directores del vector  $OO'$  es fácil comprobar que  $\cos^2 \phi' + \cos^2 \psi' + \cos^2 \xi' = 1$  con lo que queda demostrada la identidad anterior.



Una propiedad interesante del axonométrico ortogonal es que el punto  $O'$  es el ortocentro de todos los triángulos fundamentales de trazas. En efecto, tomemos un plano  $\pi$  paralelo al papel. Llamemos  $r$  a la recta contenida en el plano XY que pasa por el vértice O y es perpendicular a la traza  $p_1$  de este plano  $\pi$  con XY. Aplicando el teorema de las tres perpendiculares podemos deducir que la recta  $r'$  -proyección ortogonal de  $r$  sobre  $\pi$ - es perpendicular a  $p_1$  y contiene a la traza del eje Z con  $\pi$ . Por tanto  $r'$  es una altura del triángulo de trazas de  $\pi$ . La recta  $r$  por definición contiene a O y por tanto  $r'$  contiene a  $O'$ . Lo mismo podríamos demostrar con los otros planos principales y por tanto  $O'$  es el ortocentro de dicho triángulo.

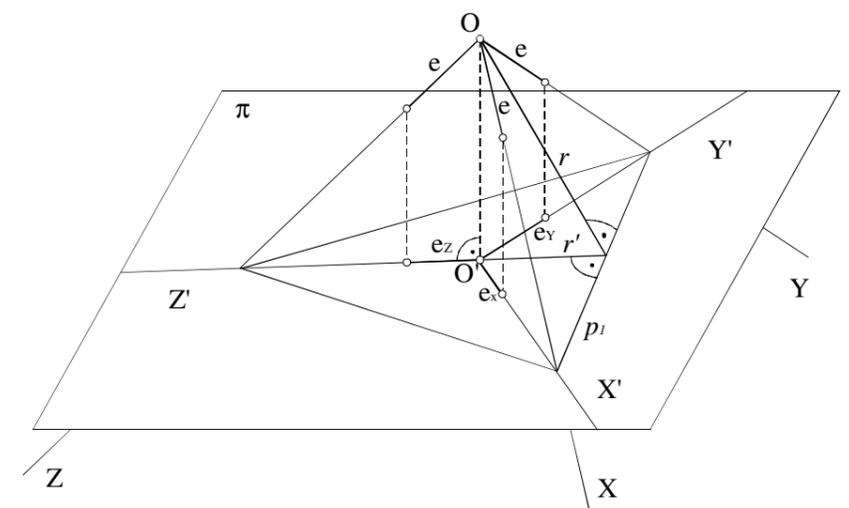


Figura 4. Un mismo segmento e (unidad a la escala del dibujo) tomado en cada uno de los ejes da la escala de sus proyecciones.

**Teorema de Schlömilch-Waisbach**

El teorema de Schlömilch-Waisbach asegura que el punto O' es el incentro<sup>1</sup> del triángulo órtico<sup>2</sup> del triángulo de trazas de cualquier plano π paralelo al papel y que la razón entre cada unidad reducida y el lado correspondiente de dicho triángulo órtico es igual a la inversa del semiperímetro del triángulo órtico. Esto es:

$$\frac{c_x^2}{a_x} = \frac{c_y^2}{a_y} = \frac{c_z^2}{a_z} = \frac{2}{a_x + a_y + a_z}$$

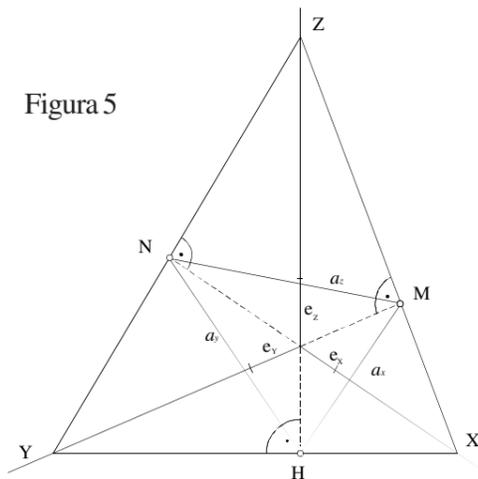


Figura 5

Para demostrarlo trazaremos en la figura 6 el triángulo ABC fundamental de trazas y su triángulo órtico DEF. Trazamos también el arco capaz de 90° con diámetro en BC. Este arco es justamente media circunferencia que contiene los puntos E y F puesto que tanto el ángulo BEC como BFC son rectos. Obsérvese que el ángulo ECF debe ser igual al EBF puesto que ambos subtenden desde puntos de la circunferencia el mismo arco.

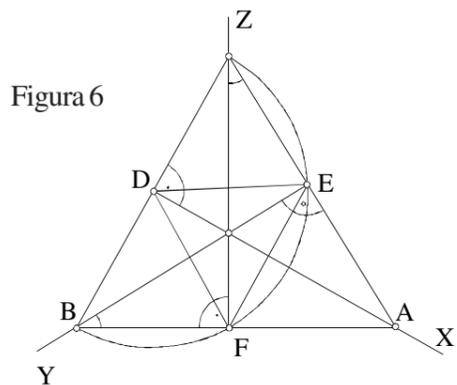


Figura 6

<sup>1</sup> Ortocentro de un triángulo es el punto donde se cortan sus alturas. Incentro es el punto donde se cortan las bisectrices de sus ángulos.

<sup>2</sup> Se llama triángulo órtico de otro triángulo al que tiene por vértices los pies de las alturas del primer triángulo.

De igual forma podemos trazar la semicircunferencia con diámetro CA y deducir que los ángulos ACF y ADF son iguales (figura 7).

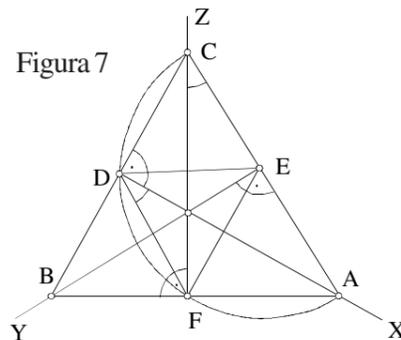


Figura 7

Además, los ángulos ADE y ABE resultan ser iguales (figura 8).

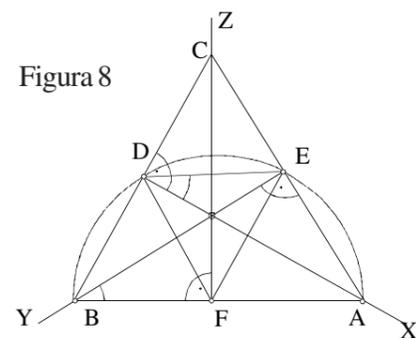


Figura 8

De esta cadena de igualdades concluimos que los ángulos ADE y ADF son iguales y por tanto la proyección ortogonal del eje X sobre el plano del papel es la bisectriz del ángulo EDF en el triángulo órtico del fundamental de trazas. El mismo argumento aplicado a los otros ejes demuestra la primera parte del teorema.

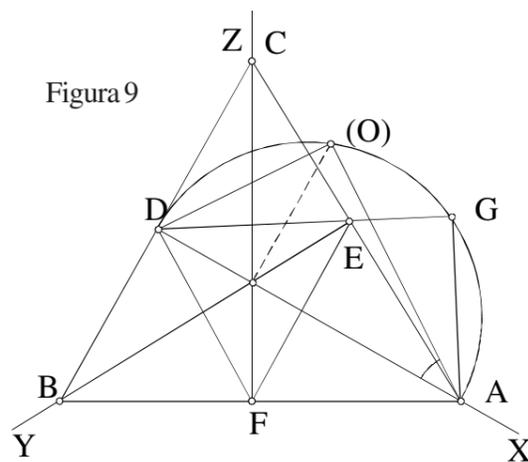


Figura 9

Por otro lado, si abatimos el plano definido por D y el eje X sobre el plano del papel obtenemos el origen abatido (O) y el ángulo φ que forma el eje X con el plano del papel aparecerá en verdadera magnitud como ángulo DA(O).

El punto A es centro de una circunferencia exinscrita al triángulo DEF. Esto puede comprobarse por ser la intersección de las bisectrices de los ángulos EDF y FEG. Trazamos esta circunferencia en la figura 10. Llamaremos G, H e I a sus puntos de tangencia con los lados del triángulo DEF.

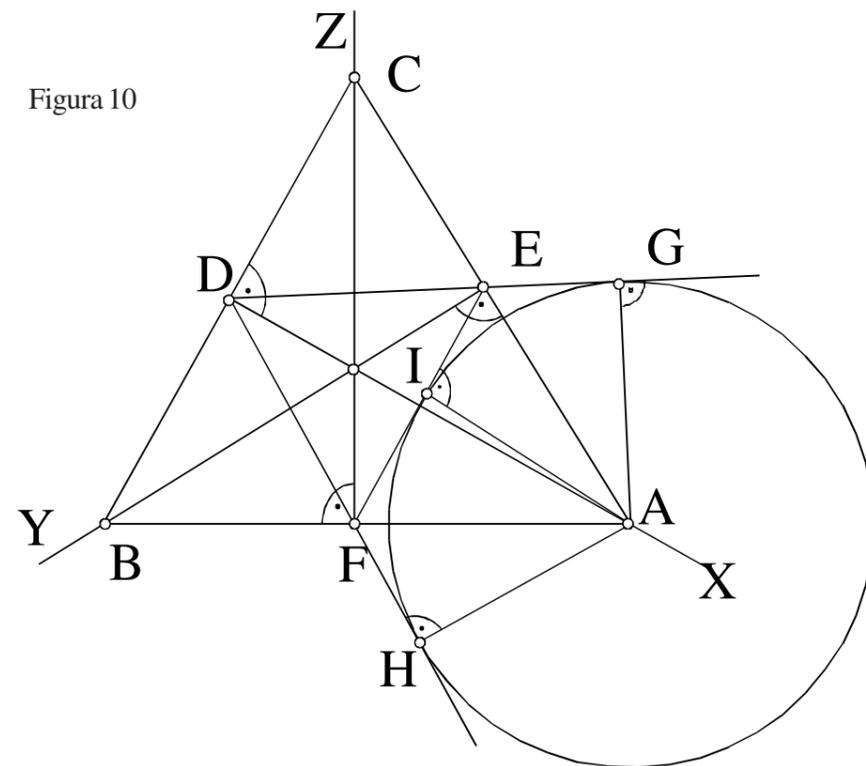


Figura 10

Los segmentos DH y DG, que evidentemente son iguales, tienen la misma longitud que coincide con el semiperímetro del triángulo DEF. Para probarlo basta comprobar que la suma DH+DG es igual a DE+DF+EG+DH es decir que bastará que probemos que EG+FH sea la longitud de EF para que comprobemos esta afirmación. Pero esto es evidente porque EA es bisectriz de IAG y por ser G e I puntos de la misma circunferencia exinscrita centrada en A resulta EG igual a EI. De igual forma AF es bisectriz de HFI por lo que FH es igual a FI.

De la figura 9, a la vista del triángulo abatido O'A(O) podemos deducir que  $c_x = \cos \phi$  es el cociente:

$$c_x = \cos \phi = \frac{AO}{A(O)}$$

Por otro lado, la semejanza entre los triángulos AD(O) y O'A(O) hace que el mismo  $\cos \phi$  puede escribirse:

$$c_x = \cos \phi = \frac{A(O)}{AD}$$

es pues evidente que podemos escribir su cuadrado como:

$$c_x^2 = \cos^2 \phi = \frac{AO \cdot A(O)}{AD^2}$$

Llamemos J, K y L a los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo DEF. Por aplicación del teorema de Thales la relación entre los segmentos AD y AO' debe ser la misma que entre los segmentos DH y DK.

$$c_x^2 = \cos^2 \phi = \frac{HK}{HD}$$

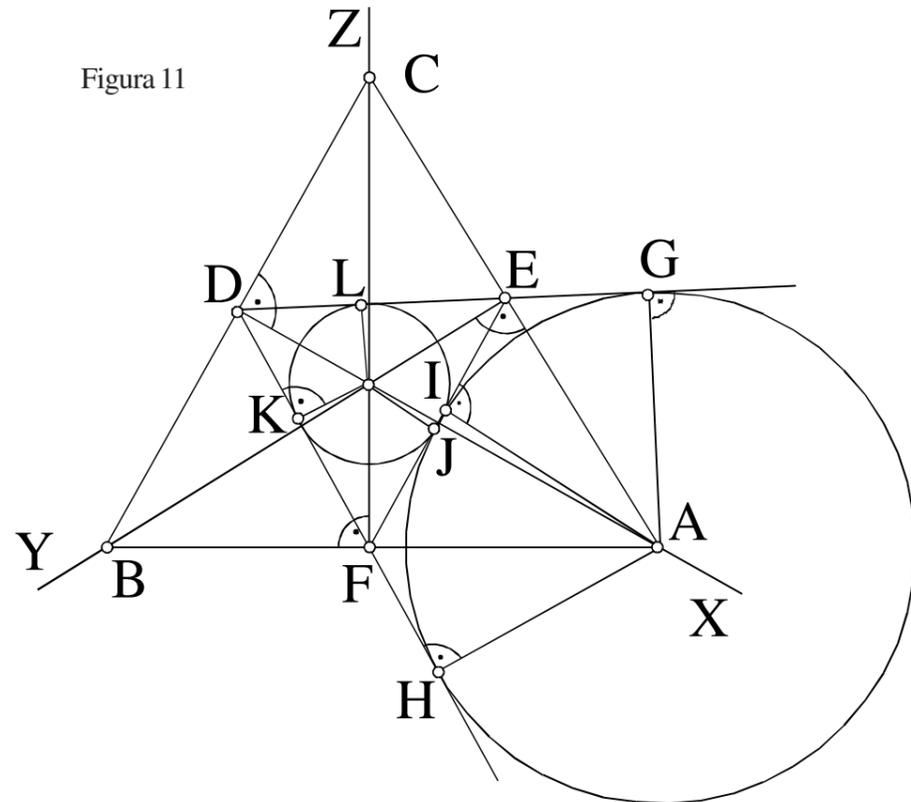


Figura 11

Además, FJ=FK por ser tangentes a la circunferencia inscrita desde F. Y de igual forma EL=EJ. Esto quiere decir que EL+FK=EF. Como HK=GL y ya sabíamos que FH+EG=EF, podemos deducir que HK=EF=a<sub>x</sub>. Por otro lado sabíamos que HD era el semiperímetro de DEF. Por tanto:

$$c_x^2 = \cos^2 \phi = \frac{a_x}{\frac{a_x + a_y + a_z}{2}}$$

Con el mismo argumento aplicado a los ejes y y z queda demostrado el teorema.

**Corolario**

Dados los coeficientes de reducción c<sub>x</sub>, c<sub>y</sub> y c<sub>z</sub> o cantidades proporcionales, los ejes axonométricos correspondientes son las bisectrices del triángulo cuyos lados son proporcionales a los cuadrados de los coeficientes de reducción. Así si a=k·c<sub>x</sub><sup>2</sup>, b=k·c<sub>y</sub><sup>2</sup> y c=k·c<sub>z</sub><sup>2</sup> basta construir un triángulo cuyos lados sean a, b y c como en la figura 12, para hallar los ejes correspondientes como bisectrices de sus ángulos.

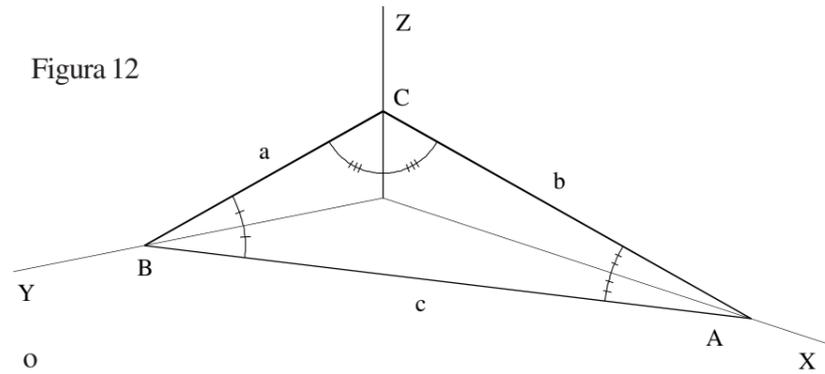


Figura 12

**Cálculo gráfico del cuadrado de un segmento**

Para calcular el cuadrado de una longitud c<sub>x</sub>, lo cual puede ser necesario para hallar a, b y c, puede emplearse un método gráfico muy sencillo basado en el teorema del cateto: Se traza una semicircunferencia de diámetro d y se construye el punto A de dicha circunferencia que dista de uno de los extremos c<sub>x</sub>. Por semejanza entre los triángulos ABC y HAB podemos establecer a/c<sub>x</sub>=c<sub>x</sub>/d. Si d=1 entonces la proyección horizontal del segmento es el cuadrado de este: a=c<sub>x</sub><sup>2</sup>.

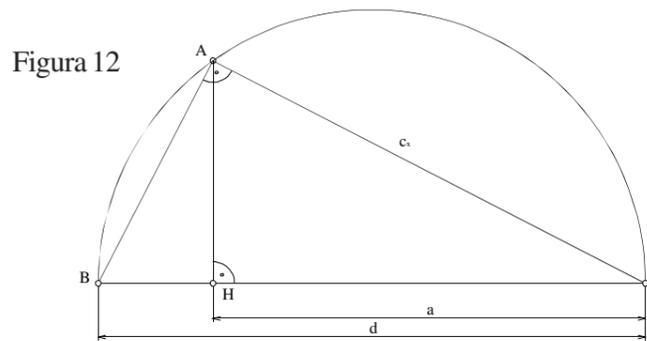


Figura 12

Si a partir de los coeficientes de reducción simplemente queremos cantidades proporcionales a sus cuadrados podemos emplear una semicircunferencia de diámetro arbitrario pero igual para los tres coeficientes de reducción.

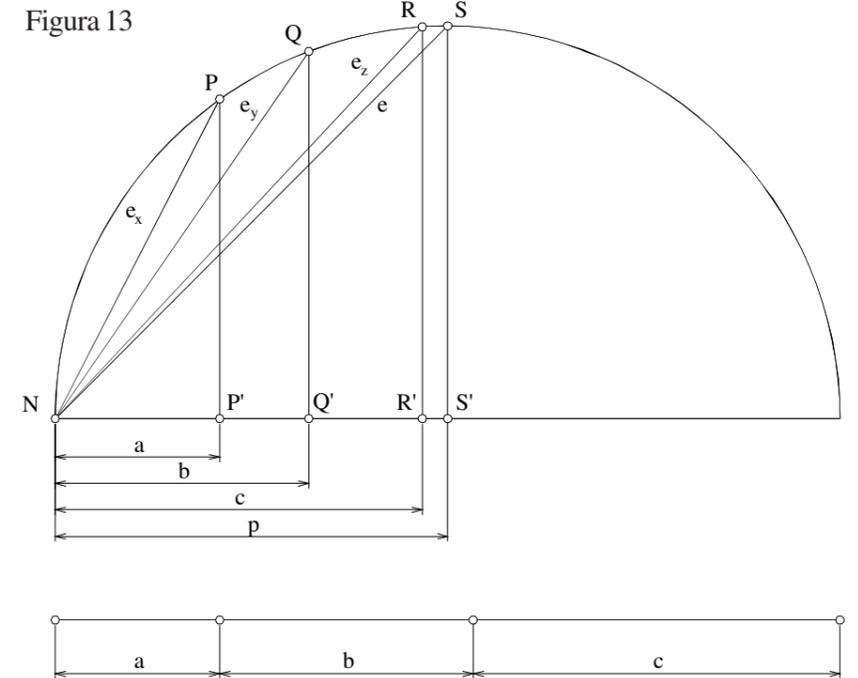


Figura 13

De hecho si queremos emplear una escala e en el dibujo, esto es el segmento de longitud e es la unidad. Entonces podemos obtener las escalas o unidades en cada eje e<sub>x</sub>=e·c<sub>x</sub>, e<sub>y</sub>=e·c<sub>y</sub> y e<sub>z</sub>=e·c<sub>z</sub>. El mencionado teorema del cateto permite su cálculo mientras que la figura 14 muestra el cálculo de e a partir de las escalas en los ejes.

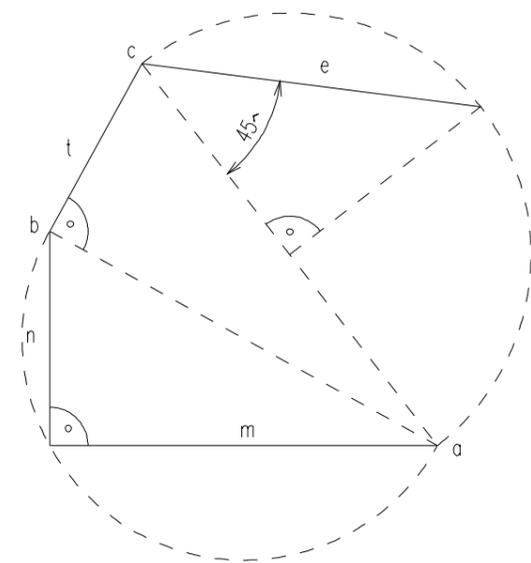


Figura 14